Šesti domaći zadatak iz predmeta Linearna algebra 1

Preduslov: Pročitati prve tri sekcije pete glave

1. Naći invarijantne potprostore operatora $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$ zadatog sa:

$$\mathcal{P}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 - 2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2. Neka je $\mathcal{G} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$ takav da:

$$\mathcal{G}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3a \\ -2a \end{pmatrix}$$

Odrediti vrijednost paramatra a za kohju je operator $\mathcal{G}$ singularan.

3. Operator $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ može imati najviše $n = dim\, V$ različitih svojstvenih vrijednosti. Objasniti zašto.

4. Naći svojstvene vrijednosti i vektore operatora $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(M_{\leq 3} \to M_{\leq 3})$ zadatog sa

$$\mathcal{T}f = -f' - 4f'', \quad \forall f \in M_{\leq 3}.$$

5. Naći svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore operatora $\mathcal{P}\mathcal{R}_{\pi/2}$ i $\mathcal{R}_{\pi/2}\mathcal{P}$ u dvodimenzionalnom prostoru.

6. Neka je V vektorski prostor neparne dimenzije. Tada operator $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ ima realnu svojstvenu vrijednost. Objasniti zašto.

7. Neka je $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^3 - t$ karakteristični polinom operatora $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Tada je operator $\mathcal{A}$ proste strukture. Objasniti zašto.

8. Neka je $\mathcal{G} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3)$ takav da:

$$\mathcal{G}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Napisati matricu operatora $\mathcal{G}^{-1}$ u standarnoj bazi.

9. Označimo sa W skup svih svojstvenih vrijednosti operatora $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti λ^*. Tada je $W \cup \{\Theta\}$ potprostor u V. Dokazati.

10. Naći svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore sljedećih matrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & -3 \\ 0 & 8 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 10 & -7 & -2 \end{pmatrix}.$$

11. Neka je matrica operatora $\mathcal{A}$ u nekoj bazi sljedeća

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Da li je operator $\mathcal{A}$ proste strukture?
b) Naći bazu u kojoj je matrica operatora $\mathcal{A}$ dijagonalna.
c) Naći matricu S takvu da $D = S^{-1}AS$, gdje je D dijagonalna matrica.

12. Provjeriti da li su tačna sljedeća tvrđenja:
a) Ako je operator $\mathcal{A}$ proste strukture, tada je i $\mathcal{A}^2$ proste strukture.
b) Ako je operator $\mathcal{A}^2$ proste strukture, tada je i $\mathcal{A}$ proste strukture.